Методы оптимизации

1 Теорема Вейерштрасса (метрический вариант).

Задача: Минимизировать функционал $J(u)$ по множеству $U \subset X$, X – метрическое.
$J_* = \inf_{u \in U} J(u)$, $J(u_*) = J_*$, $U_* = \{u \in U | J(u) = J_*\}$

Определение. *Функционал $J(u)$ на U называется полунепревным снизу (сверху), если $\forall u_n \subset U: \ \rho(u_n, u_0) \to 0 \Rightarrow J(u_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)$ $\left(J(u_0) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)\right)$*

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset U$ называется минимизирующей, если $\exists J(u_n) \to J_*$*

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset U$ сходится к множеству $K \subset U$, если $\inf_{u \in K} \rho(u_n, u) \to 0$*

Теорема. *(Теорема Вейерштрасса метрический вариант)*
Пусть U - компкатное множество, $J(u)$ - полунепрервный снизу, тогда

1. *$J_* > -\infty$*
2. *U_* - непустое компактное множество*
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ сходится к U_**

2 Слабый вариант теоремы Вейерштрасса. Применение к задаче минимазции квадратичного функционала.

H - гильбертово пространство.

Определение. *Функционал $J(u)$ на U называется слабо полунепревным снизу (сверху), если $\forall u_n \subset U: \ u_n \rightharpoonup u_0 \Rightarrow J(u_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)$ $\left(J(u_0) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)\right)$*

Замечание. *Из слабой полунепрервыности следует сильная полунепрерывность*

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset H$ слабо сходится к множеству $K \subset H$, если любая слабая предельная точка $\{u_n\}$ принадлежит K.*

Определение. *Множество $U \in H$ называется выпуклым, если $\forall u, v \in U, \ \forall \alpha \in [0,1] : \alpha u + (1-\alpha)v \in U$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется выпуклым на выпуклом U, если $\forall u, v \in U, \ \forall \alpha \in [0,1]: \ J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.*

Лемма. *Пусть U - выпуклое замкнутое ограниченное множество, тогда U - слабокомпактное множество.*

Лемма. *Пусть $J(U)$ полунепрерывный снизу и выпуклый на U, тогда он слабо полунепрерывный снизу.*

Теорема. *(Слабый вариант теоремы Вейерштрасса)*
Пусть $U \subset X$ - замкнутое ограниченное выпуклое множество, $J(u)$ - выпуклый и полунепрерывный на U, тогда

1. *$J_* > -\infty$*
2. *U_* - непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество*
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к U_**

Квадратичный функционал

Функионал $J(u) = \|Au - f\|_F^2$, $A : H \to F$ - линейный ограниченный оператор, $f \in F$. Исследуем его свойства:

1. $J(u)$ непрерывный в силу непрерывности A и непрерывности нормы.
2. Проверим выпуклость $J(u)$: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|A\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) - f\|^2 = \|\alpha(Au - f) + (1-\alpha)(Av - f)\|^2 \leqslant$ $\leqslant \left(\|\alpha(Au-f)\| + \|(1-\alpha)(Av-f)\|\right)^2 \leqslant \{x^2 \text{выпукла}\} \leqslant |\alpha|\|(Au-f)\|^2 + |1-\alpha|\|Av - f\|^2$
3. Полунепрерывный снизу
4. В общем случае не является слабо полунепрерывным т.к. если $A = I, f = 0$, то на последовательности ортонормированных векторов слабой сходимости не будет.
5. Слабо полунепрерывен снизу, т.к. полунепрерывен снизу и выпуклый.

3 Существование решения задач минимизации терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях линейной системы ОДУ

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + y(t), \ t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$u(t)$ - функция управления
Размерности: $x(t) : n \times 1, \ D(t) : n \times n, \ B(t) : n \times r, \ u(t) : r \times 1, \ y(t) : n \times 1$
Базово предполагаем, что $D(t), B(t) \in L_\infty(0, T); \ u \in L_2(0, T); \ x_0 \in \mathbb{R}^n$
Надо найти пару $x(t) \in AC[0, T], u(t) \in L_2(0, T)$. AC - абослютная непревность: 1) п.в. на $[0, T]$ существует производная; 2) верна формула Ньютона-Лейбница

Определение. *Решением Задачи Коши по Каратеодори называется функция $x(t) \in AC[0, 1]$ такая, что уравнение выполняется п.в., а граничное условие выполняется в классическом смысле.*

Определение. *Альтернативным решением называется функция $x(t) \in AC[0, 1]$ такая, что выполняется интегральное соотношение: $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t [D(t)x(t) + B(t)u(t) + y(t)] \, dt, \ \forall t \in [0, T]$*

Теорема. *Пусть $D(t), B(t) \in L_\infty(0, T), \ u, y(t) \in L_2(0, T)$ тогда существует и единственно решение Задачи Коши.*

Теорема. *(о существовании решения задачи ОУ линейной системы)*
Пусть $D(t), B(t) \in L_\infty(0, T)$, U - слабый компакт, тогда

1. *$J_* > -\infty$*
2. *$U_* \neq \varnothing$*
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ слабо в $L_2(0, T)$ сходится к U_**

4 Существование реения задачи об оптимальном нагреве стержня

Рассматривается задача:

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, x \in (0, l), t \in (0, t) \\ y_x|_{x=0} = 0 \\ y_x + y|_{x=l} = u(t) \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение: $y = y(t; x)$. Рассмотрим функционал $J(u) = \int\limits_0^l (y(T, x, u) - f(x))^2 \, dx$. Значение именно в $t = T$, то есть в конце процессса. Минимизируем этот функционал. По сути $y(T, x, u) = Au$, тогда $J(u) = \|Au - f\|^2_{L_2(0,l)}$.
Пусть $y(t, x)$ - дважды гладкая функция, а U - замкнутое ограниченное выпуклое множество.

Теорема. *(о существовании решения обратной задачи)*
Пусть U - слабый компакт в $L_2(0, T)$, тогда

1. *$J_* > \infty$*
2. *$U_* \neq \varnothing$*
3. *Любая минимизирующая последовательность слабо сходится к U_* в $L_2(0, T)$.*

5 Дифференцирование по Фреше. Применение к квадратичному функционалу

Пусть $F : X \to Y$, X, Y - банаховы.

Определение. *Оператор $A : X \to Y$ называется производной по Фреше оператора F в т. $x \in X$, если $F(x + h) - F(x) = Ah + \overline{o}(\|h\|_X)$ при $\|h\|_X \to 0$*

Лемма. *Производная по Фреше определяется единственным образом*

Определение. *Оператор F'' называется второй производной по Фреше от оператора F в т. $x \in X$, если $F'(x + h) - F'(x) = F''h + \overline{o}(\|h\|_X)$ при $\|h\|_x \to 0$.*

Определение. *Оператор F дифференицируем на множестве $U \subset X$, если он определён на множестве M : $U \subset M$ и $\exists F'(u), \forall u \in U$.*

Градиент и Гессиан

Рассматриваем Гильбертово пространство H

Определение. *Функционал F' называется градиентом функционала F, в т. $x \in H$, если* $F(x+h) - F(x) = (F'(x), h) + \overline{o}(\|x\|_H)$

Определение. *Функционал $F''(x)$ называется гессианом функционала F, в т. $x \in H$, если* $F'(x+h) - F'(x) = F''(x)h + \overline{o}(\|x\|_H)$

Найдем градиент и гессиан функционала $J(u) = \|Au - f\|_F^2$:
$J(u+h) - J(u) = \|A(u+h) - f\|^2 - \|Au - f\|^2 = \|(Au - f) + Ah\|^2 - \|Au - f\|^2 = \|Au - f\|^2 + \|Ah\|^2 + 2(Au - f, Ah) - \|Au - f\|^2 = (Au - f, Ah) + \|Ah\|^2$. Покажем, что $\|Ah\|^2 \leqslant \|A\|^2\|h\|^2 = \underline{O}(\|h\|^2) = \overline{o}(\|h\|)$.
В итоге $J'(u) = 2A^*(Au - f)$.
$J'(u+h) - J'(u) = 2A^*Ah \Rightarrow J''(u) = 2A^*A$.

6 Необходимое условие локального минимума

Теорема. *Пусть U - выпуклое множество в H, $u_* \in U$ -локальный минимум $J(u)$ на U и существует $J'(u_*)$* $\Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) \geqslant 0,\ \forall u \in U$.

Теорема. *Пусть U - выпуклое множество в H, $u_* \in intU$ - локальный минимум и существует $J'(u_*)$* $\Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) = 0,\ \forall u \in U$.

Пример. $J(u) = u,\ u \in [1,2] \subset \mathbb{R}$. *Понятно, что* $u_* = 1,\ J_* = 1,\ J'(u) = I, \Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) = (1, u-1) \geqslant 0$ *т.к.* $u \in [1,2]$.

Пример. *Сложный и непонятный*

7 Градиент терминального граничного функционала

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in (0,T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем оператор $Au(t) = x(t)$ - сопоставляет решение функции управления. Функционал $J(u) = \|Au - f\|^2$, $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Необходимо найти A^*, т.е. $(Au, v) = (u, A^*v)$
Домножим уравнение скалярно на $\psi(t)$ и проинтегрируем от 0 до T

$\int\limits_0^T(\psi(t), \dot{x}(t))dt = \int\limits_0^T(\psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t))dt$

$(\psi(t), x(t))|_0^T - \int\limits_0^T(\dot{\psi}(t), x(t))dt = \int\limits_0^T(\psi(t), Au(t))dt$

$(\psi(T), x(T)) - \int\limits_0^T(\dot{\psi}(t), x(t))dt = \int\limits_0^T(\psi(t), Au(t))dt$, Потребуем $v(t) = \psi(t)$

$(v, Au) = \int\limits_0^T(\dot{\psi}(t), x(t))dt + \int\limits_0^T(\psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t))dt$

$(v, Au) = \int\limits_0^T(\dot{\psi}(t), x(t))dt + \int\limits_0^T\left[(D^T\psi(t), x(t)) + (B^T\psi(t), u(t))\right]dt$

$(v, Au) = \int\limits_0^T(\dot{\psi}(t) + D^T\psi(t), x(t))dt + \int\limits_0^T(B^T(t)\psi(t), u(t))dt$, Потребуем $\dot{\psi}(t) + D^T\psi(t) = 0$

Тогда $(v, Au) = \int\limits_0^T(B^T(t)\psi(t), u(t))dt \Rightarrow (A^*v)(t) = B^T(t)\psi(t)$. $\psi(t)$ определяется из двойственной задачи.

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -D^T(t)\psi(t) \\ \psi(t) = v(t) \end{cases}$$

8 Градиент интегрального квадратичного функционала

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in (0,T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$J_I(u) = \int\limits_0^T|x(t;u) - f(x)|^2dt$, $Au = x(t;u)$, $J_I(u) = \|Au - f\|_{L_2}^2$, $J_I' = 2A^*(Au - f)$. Надо искать A^*
Нам подойдёт $A^*v = B^T\psi(t;v)$, где

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -D^T(t)\psi(t) - v(t),\ t \in (0,T) \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

Проверим это: $(Au,c)_{L_2} = \int\limits_0^T x(t;u)v(t)dt = \int\limits_0^T x(t;u)\left[-\dot{\psi}(t) - D^T(t)\psi(t)\right]dt = -\int\limits_0^T x(t;u)\dot{\psi}(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt =$
$-x(t;u)\psi(t)|_{t=0}^{t=T} + \int\limits_0^T \dot{x}(t;u)\psi(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt = \int\limits_0^T [D(t)x(t) + B(t)u(t)]\psi(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt =$
$= \int\limits_0^T B(t)\psi(t)u(t)dt = (u(t), B^T\psi)_{L_2}$

9 Градиент функционала в задаче о нагреве стержня

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,t) \\ y_x|_{x=0} = 0 \\ y_x + y|_{x=l} = u(t) \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим Функционал $J(u) = \int\limits_0^l |y(T,x;u) - f(x)|^2 dx$, $Au = y(T,x;u)$ тогда $J(u) = \|Au - f\|_{L_2}^2$, $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Нужно найти $A*$.
Умножим уравнение на $\psi(t,x)$ и проинтегрируем по $Q = (0,T) \times (0,l)$.
$\iint\limits_Q [y_{xx} - y_t]\psi dtdx = \int\limits_0^T \left[\int\limits_0^l y_{xx}\psi dx\right] dt - \int\limits_0^l \left[\int\limits_0^T y_t\psi dt\right] dx = \{\text{По частям}\} = \int\limits_0^T \left[y_x\psi|_{x=0}^{x=l} - y\psi_x|_{x=0}^{x=l} + \int\limits_0^l y\psi_{xx}dx\right] dt -$
$\int\limits_0^l \left[y\psi|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_0^T y\psi_t dt\right] dx = \int\limits_0^T y_x\psi|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^T y\psi_x|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^l y\psi|_{t=0}^{t=T}dx + \iint\limits_Q y(\psi_{xx} + \psi_t)dtdx =$
$= \{$Требуем $\psi_{xx} + \psi_t = 0$ в Q и $\psi_x|_{x=0} = 0$, много что обнуляется из-за граничных условий$\} =$
$= \int\limits_0^T [y_x(t,l)\psi(t,l)]dt - \int\limits_0^T y(t,l)\psi_x(t,l)dt - \int\limits_0^l [y(T,x)\psi(T,x)]dx = \int\limits_0^T [u(t) - y(t,l)]\psi(t,l)dt - \int\limits_0^T y(t,l)\psi_x(t,l)dt - (Au,v)_{L_2} =$
$= (u, \psi|_{x=l})_{L_2} - \int\limits_0^T [\psi(t,l) + \psi_x(t,l)]y(t,l)dt - (Au,v)_{L_2} = \{$Потребовали, чтобы $\psi(T,x) = v(x)$ и $(\psi_x + \psi)|_{x=l} = 0\} =$
$= (u, \psi|_{x=l})_{L_2} - (Au,v)_{L_2} = 0$
Получили, что $A^*v = \psi|_{x=l}$, где

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,t) \\ \psi_x|_{x=0} = 0 \\ \psi_x + \psi|_{x=l} = 0 \\ \psi|_{t=T} = v \end{cases}$$

10 Выпуклые функции и функционалы. Теоремы о локальном минимимуме, о множестве Лебега, о касательной плоскости. Критерий оптимальности. Примеры

Определение. *Множество $U \in H$ называется выпуклым, если $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in [0,1] : \alpha u + (1-\alpha)v \in U$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется строго выпуклым на выпуклом U, если $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in [0,1]$: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется сильно выпуклым на выпуклом U с константой $\text{æ} > 0$, если $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in [0,1]$: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{\text{æ}}{2}\alpha(1-\alpha)\|u - v\|^2$.*

Пример. *Функционал $J(u) = \|Au - f\|$ является выпуклым.*

Свойства строгой выпуклости:

1. $J_1(u), J_2(u)$ - строго выпуклы на U и $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 J_1(u) + \alpha_2 J_2(u)$ строго выпулый на U.

2. $J_1(u)$ - строго выпуклый, $J_2(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow J_1(u) + J_2(u)$ - строго выпуклый на U.

Теорема. *(о локальном минимуме)*
$J(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow$ точка локального минимума - точка глобального минимума.

Теорема. *(о множестве Лебега)*
$J(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow$ множество $L_c = \{u \in U | J(u) \leqslant c\}$ -выпукло $\forall c \in \mathbb{R}$.

Обратное неверно т.к. $J(u) = u^3$, $u \in \mathbb{R}$, $L_c = (-\infty, \sqrt[3]{c}]$

Лемма. *Пусть U - выпуклое, $J(u)$ - выпуклый на U, тогда U_* - выпуклое.*

Лемма. *Пусть U - выпуклое, $J(u)$ - строго выпуклый на U, тогда U_* содержит одну точку или $U_* = \varnothing$.*

Пример. *$U_* = \varnothing$:*

1. *$J(u) = u,\ u \in \mathbb{R} \Rightarrow J_* = -\infty, U_* = \varnothing$.*
2. *$J(u) = e^{-u},\ u \in \mathbb{R} \Rightarrow J_* = 0, U_* = \varnothing$.*

Теорема. *(о касательной плоскости)*
Пусть U - выпуклое, $J(u)$ сильно выпуклый на U с $æ > 0$ и в точке v $\exists J'(v) \Rightarrow J(u) \geqslant J(v) + (J'(v), u - v) + \frac{æ}{2}\|u - v\|^2, \forall u \in H$.

Теорема. *(критерий оптимальности)*
Пусть U - выпуклое, $J(u)$ выпуклый на U и $\exists J'(u_*) \Rightarrow u_* \in U_* \Leftrightarrow$ выполнено $(J'(u_*), u - u_*) \geqslant 0, \forall u \in U$.

Пример. *Решить уравнение $Au = f,\ A \in L(H \to H), A = A^*$. Эквивалентна задаче минизации функционала $J(u) = (Au, u) - 2(u, f) \to min$. $J'(u_*) = 0,\ (A + A^*)u_* = 2f \Rightarrow Au_* = f$*

11 Критерий выпуклости функций и функционалов. Выпуклость квадртичного функционала

Теорема. *(критерий выпуклости)*
Пусть U - выпуклое, $J(u) \in C^1(U)$, тогда следующие утверждения эквивалентны

1. *$J(u)$ выпуклый*
2. *$J(u) > J(v) + (J'(v), u - v), \forall u, v \in U$*
3. *$(J'(u) - J'(v), u - v) \geqslant 0, \forall u, v \in U$*

Выпуклость квадратичного доказана в первом билете.

12 Сильно выпуклые функции и функционалы, их свойства. Критерии сильной выпуклости функций и функционалов

Определение. *Функционал $J(u)$ называется сильно выпуклым на выпуклом U с константой $æ > 0$, если $\forall u, v \in U,\ \forall \alpha \in [0,1]:\ J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{æ}{2}\alpha(1-\alpha)\|u - v\|^2$.*

Свойства сильно выпуклости:

1. $J_1(u), J_2(u)$ - сильно выпуклы на U и $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 J_1(u) + \alpha_2 J_2(u)$ сильно выпулый на U.
2. $J_1(u)$ - сильно выпуклый, $J_2(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow J_1(u) + J_2(u)$ - сильно выпуклый на U.

Теорема. *(критерий сильной выпуклости)*
Пусть U - выпукло, $J \in C^1(U)$, тогда $J(u)$ сильно выпуклый на U с константой $æ > 0 \Leftrightarrow (J'(u) - J'(v), u - v) \geqslant æ\|u - v\|^2, \forall u, v \in U$.

Теорема. *(второй критерий сильной выпуклости)*
Пусть U - выпукло, $J \in C^2(U)$, $intU \neq \varnothing$, тогда $J(u)$ сильно выпуклый на U с константой $æ > 0 \Leftrightarrow (J''(u)h, h) \geqslant æ\|h\|, \forall u \in U, h \in H$.

Пример. $J(u) = \|u\|^2,\ J'(u) = 2u,\ J''(u) = 2I,\ (J''(u)h, h) = 2\|h\|^2 \geqslant æ\|h\|^2 \Rightarrow æ = 2$

Пример. $J(u) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2,\ u \in \mathbb{R}^3$.

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2,2,0 \\ 2,2,0 \\ 0,0,2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. По критерию положительно определенных матриц, все с.з. неотрицательны, значит матрица положительна определена: $(J''(u)h, h) \geqslant 0$. Но $J(u)$ не является сильно выпуклым т.к. при λ_1 значение ровно 0.

13 Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов

Теорема. *Пусть U - выпуклое, замкнутое, $J(u)$ сильно выпуклый на U с $æ > 0$ и полунепрерывный снизу на U, тогда*

1. *$J_* > -\infty$*
2. *$U_* = \{u_*\} \neq \varnothing$*
3. *$\forall u \in U:\ \frac{æ}{2}\|u - u_*\|^2 \leqslant J(u) - J(u_*)$*

14 Метрическая проекция точки на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве, её свойства. Примеры

Определение. *Пусть $U \subset H$. Проекцией элемента $u \in H$ на множество U называется $w \in U$: $\|w - u\| = \inf\limits_{v \in U} \|v - u\|$*

Теорема. *(существование и единственность и свойства проекции)*
Пусть U - выпуклое и замкнутое, тогда

1. *$\forall u \in H \ \exists! w = P_u u$.*
2. *$w = P_u u \Leftrightarrow (w - u, v - w) \geqslant 0, \forall v \in U$.*

Теорема. *(о нестрогой сжимаемости)*
Пусть U - выпуклое и замкнутое мноежство $\Rightarrow \forall u, v \in H \quad \|P_u u - P_u v\| \leqslant \|u - v\|$.

Пример. $U = B_R(0)$, $u \in H, w = P_u u$, $w = \begin{cases} u, u \in U \\ \dfrac{u}{\|u\|} R, u \notin U \end{cases}$. *Проверим свойство: ссли $u \in U$ то очевидно, пусть $u \notin U$, тогда $(\dfrac{u}{\|u\|}R - u, v - \dfrac{u}{\|u\|}R) = \left(\dfrac{R}{\|u\|} - 1\right)(u, v - \dfrac{u}{\|u\|}R)$. Первое слагаемое неположительно, второе тоже т.к. $\|v\| \leqslant R$. Поэтому условие выполняется.*

Пример. $U = \{u \in L_2(a,b) | \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t), \alpha(t), \beta(t) \in L_2(a,b)\}$, $\|u(t) - h(t)\|^2_{L_2} = \int\limits_a^b |u(t) - h(t)|^2 dt \to \inf$

$$P_U h = \begin{cases} h(t), \alpha(t) \leqslant h(t) \leqslant \beta(t) \\ \beta(t), \beta(t) \leqslant h(t) \\ \alpha(t), h(t) \leqslant \alpha(t) \end{cases}$$

15 Градиентный метод. Метод проекции градиента. Их сходимость

Решаем задачу $J(u) \to \inf$ в гильбертовом пространстве. Многие методы решения укладываются в итерационную схему:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k \tag{1}$$

u_0 - задано, α_k - шаг, p_k - поправление шага.

1. $p_k = -J'(u_k)$ - наискорейшее локальное убывание
2. α_k можно выбирать например так: $\alpha_k \in (\mathrm{Argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} J(u_k + \alpha p_k))$
3. u_0 хочется выбрать как можно ближе к u_*.
4. Правило останова:
   (a) малость градиента $\|J'(u_k)\| \leqslant \varepsilon$ -строгий
   (b) $\dfrac{\|u_{k+1} - u_k\|}{\|u_k\|} \leqslant \varepsilon$ -слабый
   (c) $\dfrac{|J(u_{k+1}) - J(u_k)|}{|J(u_k)|} \leqslant \varepsilon$ - самый слабый

Градиентный метод

Его имеет смысл применять к задачам вида $J(u) \to \inf,\ u \in U \subset H,\ J(u) \in C^1(H)$
Представляет из себя итерационный процесс $u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k),\ \alpha_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Выбор длины шага можно делать по-разному:

1. константный шаг (проблемы: зацикливание, перескок)
2. метод дробления: сначала задаем α_*б потом $\alpha_k = \dfrac{\alpha_*}{2^m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. На каждом шаге проверяется будет ли $J(u_k - \dfrac{\alpha_*}{2^m} J'(u_k)) < J(u_k)$ и в качестве m берется первый, при котором выполняется это неравенство.
3. метод скорейшего спуска: выбираем α для оптимального убывания.

Пример. $J(u) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}y^4 - \dfrac{1}{2}y^2 \to \inf,\ u \in \mathbb{R}^2$. *Очевидно, что $J_* = -\dfrac{1}{4}$, $U_* = \{(0,1), (0,-1)\}$. Решим с помощью градиентного метода: $J'(u) = (x, y^3 - y)$*
$u_0 = (1, -1)$, $\alpha_k = \dfrac{1}{2}$. $J'(u_0) = (1, 0)$ $u_1 = (\dfrac{1}{2}, -1)$, $u_2 = (\dfrac{1}{4}, -1), \ldots, u_k = (2^{-k}, -1)$.

Метод проекции градиента

Отличается тем, что теперь ищем оптимум не во всем пространстве, а на $U \neq H$. Тогда в какой-то момент значение функционала в точке, не принадлежащей множесту U неопределено. Исправляем так:
$u_{k+1} = P_u(u_k - \alpha_k J'(u_k)),\ \alpha_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема. *(о сходимост МПГ)*
Пусть U - выпуклое, замкнутое множество из H и $J(u) \in C^1(U)$ и градиент $J(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ на U. Пусть $J(u)$ сильно выпуклый на U с константой $æ > 0$ и коэффициенты $\alpha_k = \alpha \in (0, \dfrac{2æ}{L^2})$. Тогда при $\forall$ начальном условии последовательность u_k сходится к решению u_* и справедлива оценка: $\|u_k - u_*\| \leqslant q^k \|u_0 - u_*\|,\ q = \sqrt{1 - 2æ\alpha + \alpha^2 L^2}$

Метод скорейшего спуска

$\alpha_k = \mathrm{Argmin}_{\alpha \geqslant 0} J(u_k - \alpha J'(u_k))$.

Пример. *$J(u) = \|u\|^2$, $J'(u) = 2u$. Пусть $u_0 \in H$, тогда $u_1 = u_0 - \alpha J'(u_0) = u_0 - 2\alpha u_0 = (1 - 2\alpha)u_0$. $J(u_0 - \alpha J'(u_0)) = \|(1 - 2\alpha)u_0)\|^2 = (1 - 2\alpha)^2 \|u_0\|^2 \Rightarrow \alpha_0 = \dfrac{1}{2}$*

16 Метод Ньютона. Его сходимость

Решение задачи условной минимизации: $J(u) \to \inf_{u \in U},\ U \neq H$.
Идея: Пусть уже известно k-ое приближение $u_k \in U$. Берем квадратичную часть приращения $J(u) - J(u_k) = J_k(u) + \overline{o}(\|u - u_k\|^2)$, где $J_k(u) = (J'(u_k), u - u_k) + \dfrac{1}{2}(J''(u_k)(u - u_k), u - u_k),\ u \in U$. И вычисляем $u_{k+1} = \mathrm{Argmin}_{u \in U} J_k(u)$

Теорема. *(О сходимости метода Ньютона)*
Пусть U - выпуклое замкнутое множество, $intU \neq \varnothing$, $J(u)$ сильно выпукла с константой $æ > 0$ на U, $J(u) \in C^2(U)$, $J''(u)$ удовлетворяет на U условию Липшица с константой $L > 0$. Пусть начальное приближение удовлетворяет условию $\|u_0 - u_*\| < \dfrac{2æ}{L}$, u_* -решение задачи . Тогда метода Ньютона порождает последовательность $\{u_k\}:\ \|u_k - u_*\| \leqslant \dfrac{2æ}{L} q^{2^k}$, $q = \dfrac{L\|u_0 - u_*\|}{2æ} < 1$

17 Метод покоординатного спуска

В предыдущих методов нам требовалось вычислять градиент и гессиан функционала, но зачастую функционал не обладает нужной гладкостью. Рассмотрим этот метод для задаче минимизации без ограничений в конечномерном пространстве $J(u) \to \inf_{u \in \mathbb{R}^n}$. $\{e_i\}_{i=1}^{i=n}$ - базис. В дальнейшем будет использоваться бесконечный базис, поэтом доопределим $p_0 = e_1, p_1 = e_2, \dots, p_{n-1} = e_n, p_n = e_1, \dots, p_{2n-1} = e_n, \dots$ (циклически повторяются).
Перед запуском метода выбираем $u_0 \in \mathbb{R}^n$, стартовый шаг $\alpha_0 > 0$ и коэффициент дробления шага $\lambda \in (0, 1)$. Пусть найдено k-е приближение u_k и текущее значение шага $\alpha_k > 0$. Найдем следующее приближение. Вычислим $u = u_k + \alpha_k p_k$

1. Если $J(u_k + \alpha_k p_k) < J(u_k)$, то $u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и процесс продолжается со следующим по порядку базисным направлением p_{k+1}.
2. Если $J(u_k - \alpha_k p_k) < J(u_k)$, то $u_{k+1} = u_k - \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и процесс продолжается со следующим по порядку базисным направлением p_{k+1}. Будем называть $k+1$-ую итерацию удачной, если переход от u_k к u_{k+1} произошёл по этому или предыдущему пункту.
3. Если $J(u_k + \alpha_k p_k) \geqslant J(u_k)$, то итерация неудачная. В процессе вычислений ведётся подсчёт числа неудачных итераций, случившихся подряд. Если их число вместе с текущей не достигло n, то полагают $u_{k+1} = u_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ и переходят к следующему базисному направлению. Иначе происходит дробление шага α_k с коэффициентом $\lambda : \alpha_{k+1} = \lambda \alpha_k$.

Теорема. *(о сходимости МПС)*
Пусть $J(u)$ выпуклый, $J(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, u_0 -начальное приближение, множество Лебега $M_{J(u_0)} = \{u \in \mathbb{R}^n | J(u) \leqslant J(u_0)\}$ ограниченно. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} J(u_k) = J_*$, $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(u_k, u_*) = 0$.

Пример. *$J \in C^1(\mathbb{R}^n)$ - существенно. $J(u) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2|x-y| - 2$. $J_* = -2$, $U_* = \{(1, 1)\}$. Функционал не дифференцируем в $x = y$. Пусть $u_0 = (0, 0)$, тогда все $u_k = (0, 0)$. Все шаги неудачные.*

18 Метод штрафных функций и его сходимость

Позволяет решать задачи с большим количеством ограничений. Нарушая эти ограничения получаем "штрафы".
H - гильбретово, $J(u) \to \inf_{u \in U}, U \subset H$, $U = \{u \in U_0 | g_1(u) \leqslant 0, \dots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \dots g_{m+s}(u) = 0\}$
Функции g_j как раз задают ограничения. Неструктурированные ограничения, задаываемые множеством U_0

считаем "терпимыми"и обязуемся их не нарушать.
Будем использовать одни из самых распространённых штрафов: за нарушение неравенств будем применять индивидуальные штрафы типа срезки: $g_i^+(u) = \max(g_i(u), 0)$. За нарушения равенств будетм испльзовать модули $g_i^+ = |g_i(u)|$. Из индивидуальных штрафов собирается общий $P(u) = \sum\limits_{i=1}^{m+s} (g_i^+(u))^{P_i},\ P_i \geqslant 1,\ i = \overline{1, m+s}$
Свойства штрафов:

1. $P(u) \geqslant 0$
2. $u \in U \Leftrightarrow \begin{cases} u \in U_0 \\ P(u) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} u \in U_0 \\ g_i^+(u) = 0, i = \overline{1, m+s} \end{cases}$

Общий штраф добавляется к исходному функционалу $J(u)$ и получаем следующую задачу:

$$\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u) \to \inf_{u \in U_0}$$

Задача на терпимом множестве. $\Phi_{k*} = \inf\limits_{u \in U_0} \Phi_k(u) \leqslant \Phi_k(u_k) \leqslant \Phi_{k*} + \varepsilon_k,\ \varepsilon_k > 0.$

Определение. $\{P_k(u)\}$ - *штрафная функция множества U на множестве U_0, если*

1. *$P_k(u)$ определена на U_0 и неотрицательна на U_0*
2. $\lim\limits_{k \to \infty} P_k(u) = \begin{cases} 0, u \in U \\ +\infty, u \in U_0 \backslash U \end{cases}$

Теорема. *(Теорема о сходимости МШФ)*
Пусть H-гильбертово пространство, множество $U_0 \subset H$ слабо замкнут в H, исходная функция $J(u)$ и все индивидуальные штрафы $g_i^+(u)$ слабо полунепрерывны снизу на U_0. Пусть также нижняя грань $J(u)$ на U_0 конечна, а δ - расширение $U(\delta) = \{u \in U_0 | g_i^+(u) \leqslant \delta, i = \overline{1, m+s}\}$ допустимого множества U при некотором δ ограниченно в H. Тогда если $A_k \to +\infty$ и $\varepsilon_k \to 0$, то для элементов u_k имеет место сходимость по функционалу $J(u_k) \to J_*$, а у самой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеется слабый в H предльные точки, причем каждая из них принадлежит U_*.

Пример. $J(u) = x^2 + xy + y^2 \to \inf,\ U = \{u \in \mathbb{R}^2 | x + y = 2\},\ J_* = 3,\ u* = (1, 1).$
$\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u) = x^2 + xy + y^2 + k(|x + y - 2)^2, k \in \mathbb{N}.$
$\Phi_k'(u) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y + 2k(x + y - 2) \\ x + 2y + 2k(x + y - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$u_k = (x_k, y_k):\ x_k = y_k = \dfrac{4k}{3 + 4k} \to 1\ u_* = (1, 1).$

19 Правило множителей Лагранжа

Та же задача, что и в предыдущем пункте.
Введём функцию Лагранжа $L(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_j g_j(u),\ u \in U_0, \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_s), \lambda_j \geqslant 0.$

Теорема. *(Правило множителей Лагранжа)*
Пусть U_0 - выпуклое замкнутое множество, $u_* \in U$ - точка локального минимума $J(u)$. $g_i(u)$ - непрерывно дифференцируемы в окрестности u_*. Тогда $\exists \overline{\lambda^*} = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_s^*)$:, $\overline{\lambda^*} \neq 0$. $\lambda_j \geqslant 0, j = \overline{0, m}$. $(\dfrac{dL}{du}(u_*, \overline{\lambda^*}), u - u_*) \geqslant 0, \forall u \in U_0,\ \lambda_j^* g_j(u_*) = 0, j = \overline{1, m}$. L - выпукла по u. Тогда $u_* \in Agrmin\ _{u \in U_0} L(u, \overline{\lambda^*})$

20 Теорема Куна-Такера

Задача как в предыдущем билете.
Введём функцию Лагранжа $L(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_j g_j(u),\ u \in U_0, \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_s), \lambda_j \geqslant 0$. И возьмём $\lambda_0 = 1$.
$\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) | \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_m \geqslant 0\}$

Определение. *Точку $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda_0$ называют седловой точкой функции Лагранжа, если $L(u_*, \lambda) \leqslant L(u_*, \lambda^*) \leqslant L(u, \lambda^*),\ \forall u \in U_0, \forall \lambda \in \Lambda_0$.*

Теорема. *(достаточное услоиве оптимальности)*
Пусть функции $J(u), g_i(u), i = \overline{1, s}$ определены и конечны на U_0. Пусть (u_*, λ^*) - седловая точка функции $L(u, \lambda)$. Тогда $u_* \in U_*,\ J(u_*) = J_* = L(u_*, \lambda^*)$.

Теорема. *(Куна-Такера)*
Пусть U_0 - выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$. Пусть в функции Лагранжа $U = \{u \in U_0 | g_1(u) \leqslant 0, \dots, g_m(u) \leqslant 0\}$. Функции $J(u), g_i(u), i = \overline{1, m}$ -выпуклы на U_0, $J_* > -\infty$, $U_* \neq \varnothing$. Пусть $\exists \overline{u} \in U :\ g_1(\overline{u}) < 0, \dots, g_m(\overline{u}) < 0$ (условие слейтера). Тогда $\forall u_* \in U_*\ \exists \lambda^* \in \Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^m | \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_m \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+^m$, такакя, что пара (u_*, λ^*) -седловая точка функции Лагранжа.

21 Двойственная задача. Её свойства

Решаем задачу $J(u) \to \inf_{u \in U}, U \subset H$, $U = \{u \in U_0 | g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots g_{m+s}(u) = 0\}$. Ранее была сформулированно достаточное условие оптимальности.
Введём функцию $\chi(u) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda_0} L(u, \lambda), u \in U_0$. Теперь рассматриваем задачу $\chi(u) \to \inf\limits_{u \in U_0}$. Эта задача эквивалентна исходной и $\chi_* = \inf\limits_{U_0} \chi(u) = \inf\limits_{U} J(u) = J_*$
Двойственная задача:
$\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} L(u, \lambda),\ \lambda \in \Lambda_0$
$\psi(\lambda) \to \sup\limits_{\Lambda_0}$
обозначим $\psi^* = \sup\limits_{\Lambda_0} \psi(\lambda), \Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda_0 | \psi(\lambda) = \psi^*\}$

Лемма. *Всегда верно неравенство* $\psi(\lambda) \leqslant \psi^* \leqslant \chi_* = J_* \leqslant \chi(u), \forall u \in U_0, \forall \lambda \in \Lambda_0$

Теорема. *Для того, чтобы* $\psi^* = \chi_*$, $U_* \neq \varnothing$, $\Lambda_0 \neq \varnothing$ *необходимо и достаточно, чтобы функция Лагранжа* $L(u, \lambda)$ *имела седло. Множество седловых точек* $\{(u_*, \lambda^*)\} = U_* \times \lambda^*$

22 Каноническая и общая задачи линейного программирования. Их эквивалентность

Постановка задачи:
$(c, u) \to \inf\limits_{U}$, $U = \{u \in \mathbb{R}^n | A_1 u \leqslant b_1, A_2 u = b_2\}$ - выпуклый многогранник.
Каноническая задача:
$(c, u) \to \inf\limits_{U}$, $U = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b\}$ - канонический многогранник.
Эти задачи эквивалентны.

Определение. *Точка v называется угловой точкой множества U, если представление $v = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$, $\alpha \in (0,1)$ для $\forall v_1, v_2 \in U$ возможно только если $v_1 = v_2$, т.е. не является внутренней точкой никакого отрезка, принадлежащего U*

23 Критерий угловой точки в канонической задаче линейного программирования

Определение. *Точка v называется угловой точкой множества U, если представление $v = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$, $\alpha \in (0,1)$ для $\forall v_1, v_2 \in U$ возможно только если $v_1 = v_2$, т.е. не является внутренней точкой никакого отрезка, принадлежащего U*

Теорема. *(Критерий угловой точки канонического многогранника)*
Пусть U - канонический многогранник, тогда v - угловая точка $\Leftrightarrow$

1. $\exists\ B(v) = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset \overline{1,n},\ r = rangA:\ A_{j_1} v_{j_1} + \cdots + A_{j_r} v_{j_r} = b$
2. $\{A_j\}\{j \in B(v)\}$ - *линейно независимы*
3. $v_j = 0, j \notin B(v)$.

Если все полученные координаты $v_{i_j} > 0$, то это вырожденная угловая точка.

Пример. *Найти угловую точку* $U = \{u = (u^1, \ldots, u^n) \geqslant 0 :\ u^1 + u^2 + 3u^3 + u^4 = 3, u^1 - u^2 + u^3 + 2u^4 = 1\}$. *Получаем матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ранг матрицы равен 2. Нужно перебрать 6 вариантов:*

1. $B = \{1, 2\}$ A_1, A_2 - *лнз, v нужно искать в виде* $(*, *, 0, 0)$ *Таким обрзаом* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = b$. *Отсюда* $v = (2, 1, 0, 0)$
2. $B = \{1, 3\}$ A_1, A_3 - *лнз, v нужно искать в виде* $(*, 0, *, 0)$ *Таким обрзаом* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = b$. *Отсюда* $v = (0, 0, 1, 0)$
3. $B = \{1, 4\}$ A_1, A_4 - *лнз, v нужно искать в виде* $(*, 0, 0, *)$ *Таким обрзаом* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v = b$. *Отсюда* $v = (5, 0, 0, -2)$. *Не подходит, все координаты должны быть неотрицательны.*
4. $v = (0, 0, 1, 0)$
5. $v = (0, \frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$
6. $v = (0, 0, 1, 0)$

24 Симплекс-метод для канонической задачи ЛП

Приведенная форма к угловой точке каноническсской задачи ЛП.
Пусть $U \neq$ и нам уже известна одна угловая точка $v, B(v) = (j_1, \dots, j_r), C(v) = (A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$. Наша ближайшая цель перейти от текущей угловой точки к следующей. Это и будет 1 шаг симплекс метода. Для этого нужно перейти к приведенной форме задачи ЛП.
$\overline{v} = \begin{pmatrix} v_{j_1} \\ \dots \\ v_{j_r} \end{pmatrix}, \overline{u} = \begin{pmatrix} u_{j_1} \\ \dots \\ u_{j_r} \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \dots \\ c_{j_r} \end{pmatrix}$ Тогда по критерию угловой точки $\sum\limits_{i=1}^{m=r} A_{j_i} vj_i = B\overline{v} = b \Rightarrow \overline{v} = B^{-1}b \geqslant 0$

Тогда можно записать эту систему в виде $\sum\limits_{i=1}^{r} A_{ji} vj_i + \sum\limits_{j \in B(v)} A_j u_j = B\overline{u} + \sum\limits_{j \in B(v)} A_j u_j$ Если домножить слева на $B^{-1}(v)$, то $\overline{u} + \sum\limits_{j \in B(v)} B^{-1}(v) A_j u_j = B^{-1}(v) b = \overline{v}$. Полученная система эквивалентна исходной $Au = b$. Теперь преобразуем функционал $J(u) = (c, u) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_j u_j = (\overline{u}, \overline{c}) + \sum\limits_{j \notin B(v)} c_j u_j = (\overline{c}, \overline{v} - \sum\limits_{j \notin B(v)} (B^{-1} A_j) u_j) + \sum\limits_{j \notin B(v)} c_j u_j =$
$(\overline{c}, \overline{v}) - \sum\limits_{j \notin B(v)} (\overline{c}, B^{-1} A_j) u_j + \sum\limits_{j \notin B(v)} c_j u_j = (\overline{c}, \overline{v}) - \sum\limits_{j \notin B(v)} ((\overline{c}, B^{-1} A_j) - c_j) u_j = J(v) - \sum\limits_{j \notin B(v)} \Delta_j u_j, \Delta_j = ((\overline{c}, B^{-1} A_j) - c_j)$

Описание одного шага симплекс-метода

Положим $u_j = 0,\ j \notin B, j \notin k \Rightarrow J(u) = J(v) - \Delta_k u_k \to \inf,\ u_{j_i} = v_{j_i} - \xi_{ik} u_k,\ i = \overline{1, r}$
Условие $u \geqslant 0 \Rightarrow u_{j_i} \geqslant 0, u_k \geqslant 0; u_j = 0, j \notin B, j \notin k$. Мы хотим перейти от $(v, B(v))$ к новой точке $u = w$ за счёт выбора такого $u_k, k \notin B$, чтобы новая точкая имела вид $w = \{w_{j_i} = v_{j_i} - \xi_{i_k},\ i = \overline{1, r}, w_k = u_k, ; w_j = 0, j \notin B(v), j \notin k\} \in U$.

1. $\Delta_j = (\overline{c}, \xi_j) - c_j \leqslant 0, \forall j \notin B(v) \Rightarrow c_j \geqslant (\overline{c}, \xi_j), \forall j \notin B(v)$. В этом случае $J(u) = J(v) - \sum\limits_{j \notin B(v)} \Delta_j u_j \geqslant J(v)$. В этом случае $J(v) = J_*, v \in U_*$ - решение задачи.

2. $\exists \Delta_k > 0$ при некоторых $k \notin B$, причем $\xi_k = B^{-1} A_k \leqslant 0$ю В этом случае при выборе $u_k > 0$ получаем $J(w) > J(v)$ В этом случае $J_* = -\infty$.

3. $\exists \Delta_k > 0$ при некоторых $k \notin B$ и для каждого такого k найдется норме $i \in 1, \dots, r$ такой, что $\xi_{ik} = (B^{-1} A_k) > 0$. Иначе говоря, множество индексов $I_k(v) = \{i : i = \overline{1, r}, \xi_{ik} > 0\} \neq \varnothing$ для всех $k \notin B$, для любого $\Delta_k > a$. A

25 Симплекс таблица: её преобразование на одном шаге симплекс метода

26 Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом

$J(u) = \int\limits_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + g^0(x(T))$, $x(t)$ - решение задачи Коши $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0$.

Определение. *Непрерывная функция x(t) называется решением задачи Коши, если* $x(t) = x_0 + \int\limits_0^T f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$, $x(t; u)$ *- траектория, соответствующая управлению* u.

Ищем градиент по определению: $J(u+h) - J(u) = (J'(u), h) + \overline{o}(\|h\|)$. Работаем в $L_2(0, T)$.
$J(u+h) - J(u) = \int\limits_0^T (J'(u)(t), h(t))_{\mathbb{R}^r} dt + \overline{o}(\|h\|)$

Теорема. *(существование градиента)*
Пусть $f, f'_x, f'_u, f^0, f^0_x, f^0_u$ *непрерывны по* (x, u, t) *на* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, T]$ *и удовлетворяют условию Липшица по (x,u) на этом же множестве.Тогда функция* $J(u) \in C^1(L_2(0, T))$ *причем* $J'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u}|_{x = x(t;u), u = u(t), \psi = \psi(t;u)}$. H *- функция Гамильтона-Понтрягина* $H = H(x, t, u, \psi) = -f^0(x, u, t) + (\psi, f(x, u, t))$, *где* $\psi(t, u)$ *- решение Задачи Коши* $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \psi(T) = -\frac{\partial g^0}{\partial x}|_{x = x(T;u)}$

27 Принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления со свободным правым концом

$J(u) = \int\limits_0^T f^0()x(t), u(t), t) dt + g^0(x(T))$, $x(t)$ - решение задачи Коши $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0$. Задача $J(u) \to \inf$
$U = \{u \in L_2(0, T) | u(t) \in V \subset \mathbb{R}^2, \text{п.в. } t \in (0, T)\}$ - геометрическое ограничение

Определение. $u \in U$ *называется оптимальным управлением, если* $J(u) = J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$. *Функция* $x = x(t) = x(t; u)$ *называется соответствующей оптимальнйо траекторией.*

Теорема. *(Принцип максимума Понтрягина)*
Пусть $f, f'_x, f^0, f^0_x, g^0, g^0_x$ *непрерывны по совокупности переменных,* $(x(t), u(t))$ *- оптимальная пара (оптимальный процесс).* $H(x,u,t,\psi) = -f^0(x,u,t) + (\psi, f(x,u,t))$ *- функция Гамильтона-Понтрягина.* $\psi(t)$ *- решение сопряженной системы* $\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \psi(T) = -\dfrac{\partial g^0}{\partial x}|_{x=x(T;u)}$. *Тогда* $H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \max\limits_{v \in U} H(x(t), v, t, \psi(t))$ *п.в. на* $(0, T)$.